Лабораторная работа №10:

Вариант 56, Ус Владимир, группа 2МО-1

1. Решение уравнения 49111x - 57973y = 1 в целых числах

Уравнение: 49111x - 57973y = 1.

Первый способ (алгоритм Евклида):

- Найдём НОД(49111, 57973) алгоритмом Евклида:

57973 = 1 × 49111 + 8862,

49111 = 5 × 8862 + 4801,

8862 = 1 × 4801 + 4061,

4801 = 1 × 4061 + 740,

4061 = 5 × 740 + 361,

740 = 2 × 361 + 18,

361 = 20 × 18 + 1,

18 = 18 × 1 + 0.

НОД = 1, решение существует.

- Обратный ход для частного решения:

1 = 361 - 20 × 18,

18 = 740 - 2 × 361 → 1 = 361 - 20 × (740 - 2 × 361) = 41 × 361 - 20 × 740,

361 = 4061 - 5 × 740 → 1 = 41 × (4061 - 5 × 740) - 20 × 740 = 41 × 4061 - 225 × 740,

740 = 4801 - 1 × 4061 → 1 = 41 × 4061 - 225 × (4801 - 1 × 4061) = 266 × 4061 - 225 × 4801,

4061 = 8862 - 1 × 4801 → 1 = 266 × (8862 - 4801) - 225 × 4801 = 266 × 8862 - 491 × 4801,

4801 = 49111 - 5 × 8862 → 1 = 266 × 8862 - 491 × (49111 - 5 × 8862) = 2721 × 8862 - 491 × 49111,

8862 = 57973 - 1 × 49111 → 1 = 2721 × (57973 - 49111) - 491 × 49111 = 2721 × 57973 - 3212 × 49111.

Получаем: 2721 × 57973 - 3212 × 49111 = 1.

Сравнивая с исходным уравнением 49111x - 57973y = 1, имеем:

x = -3212, y = -2721.

- Общее решение:

x = -3212 - 57973k,

y = -2721 - 49111k,

где k — целое число.

- Положительное решение (при k = -1):

x = -3212 - 57973 × (-1) = 54761,

y = -2721 - 49111 × (-1) = 46390.

Проверка: 49111 × 54761 - 57973 × 46390 = 1 (верно).

Второй способ (цепные дроби):

- Разложим 57973/49111 в цепную дробь (шаги аналогичны алгоритму Евклида выше).

Коэффициенты: [1; 5, 1, 1, 5, 2, 20, 18].

- Подходящие дроби:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| n | a\_n | p\_n | q\_n |
| -2 | - | 0 | 1 |
| -1 | - | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 5 | 6 | 5 |
| 2 | 1 | 7 | 6 |
| 3 | 1 | 13 | 11 |
| 4 | 5 | 72 | 61 |
| 5 | 2 | 157 | 133 |
| 6 | 20 | 3212 | 2721 |
| 7 | 18 | 57973 | 49111 |

- Для n = 6: p\_6 = 3212, q\_6 = 2721.

Проверка: 57973 × 2721 - 49111 × 3212 = 1.

Отсюда x\_0 = -3212, y\_0 = -2721.

- Общее решение совпадает с первым способом.

Ответ:

x = -3212 - 57973k,

y = -2721 - 49111k,

k — целое число.

Положительное решение: x = 54761, y = 46390.

---

2. Решение уравнения x² - 111y² = 1 в целых числах

Уравнение: x² - 111y² = 1 (уравнение Пелля).

Решение с помощью цепных дробей:

- Разложим √111 в цепную дробь:

α₀ ≈ 10.535, a₀ = 10,

α₁ ≈ 1.8668, a₁ = 1,

α₂ ≈ 1.1535, a₂ = 1,

α₃ ≈ 6.5117, a₃ = 6,

α₄ ≈ 1.9535, a₄ = 1,

α₅ ≈ 1.0486, a₅ = 1,

α₆ ≈ 20.535, a₆ = 20,

α₇ = α₁ (период: [1, 1, 6, 1, 1, 20], длина 6).

- Подходящие дроби (до n = 5):

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| n | a\_n | p\_n | q\_n |
| -2 | - | 0 | 1 |
| -1 | - | 1 | 0 |
| 0 | 10 | 10 | 1 |
| 1 | 1 | 11 | 1 |
| 2 | 1 | 21 | 2 |
| 3 | 6 | 137 | 13 |
| 4 | 1 | 158 | 15 |
| 5 | 1 | 295 | 28 |

- Фундаментальное решение: x = p₅ = 295, y = q₅ = 28.

Проверка: 295² - 111 × 28² = 87025 - 87024 = 1.

- Общее решение:

x\_k + y\_k √111 = (295 + 28 √111)^k, k = 1, 2, 3, ...

Минимальное положительное решение: x = 295, y = 28.

Ответ:

Фундаментальное решение: x = 295, y = 28.

Общее решение: x\_k + y\_k √111 = (295 + 28 √111)^k, k = 1, 2, 3, ...

---

3. Разложение ∛5 в цепную дробь и оценка погрешности

Разложение α = ∛5 в цепную дробь:

- α ≈ 1.7099759466766968, a₀ = 1.

α₁ ≈ 1.4085, a₁ = 1,

α₂ ≈ 2.447, a₂ = 2,

α₃ ≈ 2.233, a₃ = 2,

α₄ ≈ 4.2918, a₄ = 4,

α₅ ≈ 3.426, a₅ = 3,

α₆ ≈ 2.347, a₆ = 2,

α₇ ≈ 2.882, a₇ = 2,

α₈ ≈ 1.1337, a₈ = 1,

α₉ ≈ 7.477, a₉ = 7,

α₁₀ ≈ 2.096, a₁₀ = 2.

Коэффициенты: [1; 1, 2, 2, 4, 3, 2, 2, 1, 7, 2, ...].

Подходящая дробь с номером 10:

- Вычисление p\_n и q\_n:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| n | a\_n | p\_n | q\_n |
| -2 | - | 0 | 1 |
| -1 | - | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 5 | 3 |
| 3 | 2 | 12 | 7 |
| 4 | 4 | 53 | 31 |
| 5 | 3 | 171 | 100 |
| 6 | 2 | 395 | 231 |
| 7 | 2 | 961 | 562 |
| 8 | 1 | 1356 | 793 |
| 9 | 7 | 10453 | 6113 |
| 10 | 2 | 22262 | 13019 |

- Подходящая дробь: 22262/13019.

Оценка погрешности:

- |∛5 - 22262/13019| < 1/(q₁₀ × q₁₁),

где q₁₁ = a₁₁ × q₁₀ + q₉.

- a₁₁: α₁₀ ≈ 2.096, a₁₀ = 2,

α₁₁ ≈ 1/(2.096 - 2) ≈ 10.4167 → a₁₁ = 10.

- q₁₁ = 10 × 13019 + 6113 = 136303.

- Погрешность: < 1/(13019 × 136303).

Ответ:

- Цепная дробь: [1; 1, 2, 2, 4, 3, 2, 2, 1, 7, 2, ...].

- Подходящая дробь n=10: 22262/13019.

- Погрешность: < 1/(13019 × 136303).

---

4. Решение сравнения 15x ≡ 3 (mod 109)

\*\*Первый способ (нахождение обратного элемента):\*\*

- Упрощение: 15x ≡ 3 (mod 109).

Делим на НОД(15, 3) = 3: 5x ≡ 1 (mod 109).

- Обратный к 5 mod 109 (расширенный алгоритм Евклида):

109 = 21 × 5 + 4,

5 = 1 × 4 + 1,

4 = 4 × 1 + 0.

Обратный ход:

1 = 5 - 1 × 4 = 5 - 1 × (109 - 21 × 5) = 22 × 5 - 1 × 109.

Обратный элемент: 5⁻¹ ≡ 22 (mod 109).

- Решение: x ≡ 22 × 1 ≡ 22 (mod 109).

Проверка: 15 × 22 = 330 ≡ 330 - 3 × 109 = 3 (mod 109).

Второй способ (диофантово уравнение):

- Уравнение: 15x - 109y = 3.

- Решение однородного уравнения:

109 = 7 × 15 + 4,

15 = 3 × 4 + 3,

4 = 1 × 3 + 1,

3 = 3 × 1 + 0.

Обратный ход:

1 = 4 - 1 × 3 = 4 - 1 × (15 - 3 × 4) = 4 × 4 - 1 × 15 = 4 × (109 - 7 × 15) - 1 × 15 = 4 × 109 - 29 × 15.

Частное решение: умножаем на 3:

3 = 12 × 109 - 87 × 15 → x₀ = -87.

- Решение: x ≡ -87 ≡ 22 (mod 109).

Ответ: x ≡ 22 (mod 109).